



Ad Soyadı:	Bölümü: Matematik	NOTU
Numarası:	Dersin Adı: Kısmi Türevli Denklemler	
İmza:	Sınav Tarihi: 10 Kasım 2025	

Süre 75dk.

$$u(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{m!n!} \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial t^n} u(0, 0) x^m t^n$$

1. (30 puan)  $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 2(x+y)z$  kısmi türevli denkleminin  $x = 2y$ ,  $z = 1$ ,  $x > 0$  başlangıç eğrisinden geçen çözümünün (a) tek olduğunu gösterin, (b) çözümünü bulun.

**Çözüm:**

(a)  $P(x, y, z) = x^2$ ,  $Q(x, y, z) = y^2$ ,  $R(x, y, z) = 2(x+y)z$ ,  $x(t) = 2t$ ,  $y(t) = t$ ,  $z(t) = 1$ ,  $t > 0$  alalım.

$$P(x(t), y(t), z(t)) \frac{dy}{dt} - Q(x(t), y(t), z(t)) \frac{dx}{dt} = 4t^2 - 2t^2 = 2t^2 \neq 0$$

(b)

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y^2} = \frac{dz}{2(x+y)z}$$

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y^2} \Rightarrow \frac{-1}{x} = \frac{-1}{y} + c_1 \Rightarrow u_1 = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = c_1$$

$$\frac{dx - dy}{x^2 - y^2} = \frac{dz}{2(x+y)z} \Rightarrow \frac{d(x-y)}{x-y} = \frac{dz}{2z} \Rightarrow u_2 = \frac{z}{(x-y)^2} = c_2$$

$$x = 2y, \quad z = 1 \Rightarrow u_1 = \frac{1}{y} - \frac{1}{2y} = \frac{1}{2y} \quad \text{ve} \quad u_2 = \frac{1}{(2y-y)^2} = \frac{1}{y^2}$$

$$4u_1^2 = u_2 \Rightarrow 4\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{z}{(x-y)^2}$$

**Cevap:**

$$z = 4(x-y)^2 \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)^2$$

2. (30 puan)  $u_t = u + u_x^2$ ,  $u(0, x) = x^2 + x$  Cauchy probleminin orijin etrafında tanımlı analitik çözümünün seri açılımının dercesi ikiden küçük veya eşit terimlerini bulun.

**Çözüm:**

$$u(0, x) = x^2 + x, \quad u_x(0, x) = 2x + 1, \quad u_{xx}(0, x) = 2$$

$$u(0, 0) = 0, \quad u_x(0, 0) = 1, \quad u_{xx}(0, 0) = 2$$

$$u_t = u + u_x^2 \implies u_{tx} = u_x + 2u_x u_{xx}$$

$$u_t(0, 0) = 1, \quad u_{tx}(0, 0) = 5$$

$$u_{tt} = u_t + 2u_x u_{xt}, \quad u_{tt}(0, 0) = 1 + 2 \cdot 1 \cdot 5 = 11$$

$$u(t, x) = u(0, 0) + u_x(0, 0)x + u_t(0, 0)t + \frac{1}{2!}u_{xx}(0, 0)x^2 + \frac{1}{1!1!}u_{xt}(0, 0)xt + \frac{1}{2!}u_{tt}(0, 0)t^2 + \dots$$

**Cevap:**

$$u(t, x) = x + t + x^2 + 5xt + \frac{11}{2}t^2 + \dots$$

3. (20 puan)  $z^2 z_x + z_y = 0$ ,  $z(x, 0) = 2x + 1$  denkleminin  $(x, y)$  düzlemindeki  $z = -1$  ve  $z = 1$  karakteristik doğrularının denklemlerini bulun ve çizin.

**Çözüm:**

$$\frac{dx}{z^2} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{0} \implies u_1 = z = c_1, \quad u_2 = x - z^2 y = c_2 \implies z = 2(x - z^2 y) + 1$$

$(x, y)$  düzleminde karakteristik eğriler

$$z_0 = 2x_0 + 1, \quad x - z_0^2 y = x_0 = \frac{z_0 - 1}{2}$$

$$z_0 = -1 \implies x - y = -1$$

$$z_0 = 1 \implies x - y = 0$$

4. (20 puan)  $(y - z)z_x + (z - x)z_y = x - y$  denkleminin genel çözümünü bulun.

**Çözüm:**

$$dx + dy + dz = 0 \implies u_1 = x + y + z = c_1$$

$$xdx + ydy + zdz = 0 \implies u_2 = x^2 + y^2 + z^2 = c_2$$

Genel çözüm:

$$F(u_1, u_2) = 0 \implies F(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2) = 0$$